Leçon 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

Développements :

Théorème de Grothendieck, Théorème de Banach-Alaoglu et optimisation.

Bibliographie :

Gourdon, Saint Raymond, Hauchecorne, Hirsch-Lacombe, Briane et Pagès, Filbet, Ciarlet, Romabaldi (algèbre), Albert, Rouvière, OA.

Rapport du jury 2016 :

Une telle leçon doit bien sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués. La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être maîtrisée. Il faut savoir énoncer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. A contrario, des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions. Pour aller plus loin, on peut éventuellement considérer le cas d'espaces métrisables mais dont la mé- trique n'est pas issue d'une norme, par exemple dans le champ des espaces de fonctions analytiques (topologie de la convergence uniforme sur tout compact par exemple).

Rapport du jury 2017 :

Une telle leçon doit bien sûr contenir beaucoup d'illustrations et d'exemples, notamment avec quelques calculs élémentaires de normes subordonnées (notion qui met en difficulté un trop grand nombre de candidats). Le lien avec la convergence des suites du type $X_{n+1} = AX_n$ doit être connu. Lors du choix de ceux-ci (le jury n'attend pas une liste encyclopédique), le candidat veillera à ne pas mentionner des exemples pour lesquels il n'a aucune idée de leur pertinence et à ne pas se lancer dans des développements trop sophistiqués. La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être maîtrisée. Il faut savoir énoncer le théorème de Riesz sur la compacité de la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé. Le théorème d'équivalence des normes en dimension finie, ou le caractère fermé de tout sous-espace de dimension finie d'un espace normé, sont des résultats fondamentaux à propos desquels les candidats doivent se garder des cercles vicieux. A contrario, des exemples d'espaces vectoriels normés de dimension infinie ont leur place dans cette leçon et il faut connaître quelques exemples de normes usuelles non équivalentes, notamment sur des espaces de suites ou des espaces de fonctions et également d'applications linéaires qui ne sont pas continues.

1 Généralités sur les espaces vectoriels normés

1.1 Espaces vectoriels normés

Définition 1 (Gourdon p7). *[St Raymond p93] Norme et evn.*

Exemple 2 (Gourdon p7). *Valeur absolue, module, norme* $1,2,\infty$ *pour les vecteurs, norme* ∞ *pour les fonctions bornées.*

Proposition 3 (St Raymond p94). *Un evn est un espace métrique puisque* $(x, y) \mapsto ||x - y||$ *est une distance.*

Remarque 4. *La norme est* 1*-lipschitzienne donc continue.*

Remarque 5. *Quand est-ce qu'on définit une même topologie ?*

Définition 6 (Gourdon p12). *[Raym p94] Normes équivalentes.*

Proposition 7 (Raym p94). *Deux normes sont équivalentes si et seulement si elles définissent la même topologie.*

Remarque 8. *Deux normes différentes peuvent définir deux topologies différentes sur le même espace. Dans l'exemple suivant, la suite* $x \mapsto x^n$ *converge vers la fonction nulle pour la norme* 1 *mais pas pour la norme* ∞*.*

Contre exemple 9 (Hauch p321). *[Pommellet]* $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ $||.||_1$ *ou* $||.||_2$ *et* $||.||_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

Exemple 10. $||.||_1$ *et* $||.||_\infty$ *sont équivalentes sur* $\mathbb{R}^n$*.*

1.2 Espaces préhilbertiens

Définition 11 (Hirsch Lacombe p84). *Produit scalaire : Forme sesquilinéaire hermitienne, définie positive.*

Définition 12 (Hirsch Lacombe p84). *Espace préhilbertien : espace vectoriel muni d'un produit scalaire*

Exemple 13 (Hirsch Lacombe p84). $\mathbb{R}^n$, C^n, L^2, l^2.

Proposition 14 (Hirsch p86). *Inégalité de Cauchy-Schwarz avec cas d'égalité.*

Corollaire 15 (Hirsch p86). *La relation* $||x|| = \sqrt{<x,x>}$ *définit une norme.*

Remarque 16. *C'est parfois plus facile de montrer qu'une norme est issue d'un p.s plutôt que de montrer que c'est une norme directement.*

Proposition 17 (Hirsch p86). *Formules de polarisation.*

Proposition 18 (Hirsch p87). *Identité du parallélogramme.*

Proposition 19 (Hirsch p87). *Une norme provient d'un produit scalaire si et seulement si elle vérifie l'identité du parallélogramme. Elle caractérise entièrement les normes issues de produit scalaire.*

Remarque 20. *Sur* $C([0,1])$*, la norme infinie ne découle pas d'un produit scalaire (prendre* $f = id$ *et* $g = 1$*).*
Sur K^n*, la norme infinie ne découle pas d'un produit scalaire*

1.3 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Proposition 21 (Gourdon p50). *[Raym p96] Dans un e.v.n de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Remarque 22 (Pommellet p70). *En dimension infinie, certaines normes sont équivalentes.* $N_1(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ *et* $N_2(f) = ||f+f'||_\infty$.

Proposition 23 (Gourdon p50). *Les parties compactes d'un evn de dimension finie sont les parties fermés bornées.*

Contre exemple 24. *Pour* $C^0([0,1])$ *muni de* $||.||_\infty$, $B(0,1)$ *est un fermé borné mais n'est pas compact car on peut exhiber une suite n'admettant aucune extractrice convergente.*

Proposition 25 (Gourdon p50). *Tout sev de dimension finie est fermé. (Ici ?)*

Théorème 26. *Théorème de Riesz.*

Contre exemple 27 (Hauchecorne p326). $\mathbb{R}[X]$ *muni de la norme du sup des coefficients, la boule unité n'est pas compacte (regarder la suite des* X^n*).*

Remarque 28. *Regarder les contre exemples dans le Hauchecorne.*

1.4 Exemple de construction d'un evn : les espaces L^p

Remarque 29. *Partie non nécessaire.*

Définition 30 (Briane Pagès p153). $\mathcal{L}^p$. *Ce sont des espaces vectoriels.*

Remarque 31. *On a donc une famille d'e.v., il semble naturel de vouloir les comparer entre eux.*

Proposition 32 (Briane p154). *Si la mesure est finie alors si* $p < q$, $L^p \subset L^q$*. Mais il n'y a aucune inclusion quand l'ensemble n'est pas de mesure finie.*

Contre exemple 33 (Briane p154). $1_{[0,1]}/\sqrt{x}$ *est dans* L^1 *mais pas dans* L^2 *et* $1_{[1,+\infty[}/x$ *est dans* L^2 *mais pas dans* L^1.

Définition 34. *Norme p.*

Remarque 35. *On voudrait que ce soit une norme.*

Proposition 36 (Briane p155). *Inégalité de Holder.*

Proposition 37 (Briane p156). *Cauchy-Schwarz.*

Proposition 38 (Briane p158). *Inégalité de Minkowski.*

Proposition 39 (Briane p161). *Les normes p sont des semi-normes.*

Définition 40 (Briane p161). *Pour* $1 \leq p \leq +\infty$*, on définit* $N_p(X) := \{f \in L_p(X), ||f||_p = 0\}$*. C'est un sev de* $L^p(X)$ *qui est l'ensemble des fonctions nulles presque partout.*

Définition 41 (Briane p161). *On définit* $L^p(X) := L_p(X)/N_p(X)$.

Proposition 42 (Briane p161). *Pour* $f \in L_p(X)$, $||f||_p$ *est bien définie, et est une norme.*

Remarque 43 (Briane p162). *En quotientant l'espace vectoriel par l'ensemble des fonctions de semi-norme nulle, on a obtenu un espace vectoriel normé.*

Théorème 44. *Théorème de Riesz-Fischer.*

Proposition 45. L^2 *peut être muni d'un produit scalaire.*

2 Applications linéaires continues

2.1 Caractérisation

Définition 46 (Gourdon p48). *On note* $L(E,F)$ *l'ensemble des applications linéaires de* E *vers* F *et* $L_c(E,F)$ *l'ensemble des applications linéaires continues.*

Proposition 47 (Gourdon p48). *Equivalence de la continuité des applications linéaires.*

Remarque 48 (Pommellet). *Des exemples et une application linéaire est continue si et seulement si elle transforme les suites de limite nulle en suites bornées.*

Proposition 49. $L_c(E,F)$ *est une algèbre munie de* $+, ., \circ$.

Proposition 50. $+$ *et* $.$ *sont linéaires continues en chaque variable.*

Remarque 51. *L'équivalence des normes est équivalent à la continuité de l'application identité et de l'inverse de l'identité.*

Remarque 52. *La continuité dépend de la norme.*

Exemple 53 (Hauch p323, Pomm p66)**.** *L'application* $f \in C_b^0 \to f(0)$ *est continue pour la norme uniforme mais pas pour la norme* 1*.*

Théorème 54 (Gourdon p50)**.** *En dimension finie, toutes les applications linéaires sont continues.*

Contre exemple 55 (Gourdon p50)**.** $P \mapsto P'$ *sur* $\mathbb{R}[X]$ *muni de la norme du sup des coefficients n'est pas continue.*

Remarque 56. *La définition du dual topologique et la proposition* f *continue si et seulement si* $Kerf$ *est fermé.*

Dans Hauchecorne : un exemple de forme linéaire discontinue.

Faut-il parler des formes linéaires ?

2.2 Norme subordonnée

Définition 57 (Gourdon p48)**.** *Norme d'application.*

Proposition 58 (Gourdon p48)**.** $L_c(E, F)$ *est un evn.*

Proposition 59 (Gourdon p48)**.** *Sous multiplicativité de la norme.*

Exemple 60. $f \mapsto f(0)$ *pour la norme uniforme est de norme* 1 *(atteint pour* $f = 1$*).*

Exemple 61 (Hauchecorne p325)**.** $f \mapsto \int_{1/2}^1 f - \int_0^{1/2} f$ *de norme 1 (mais il faut prendre une suite de fonctions).*

Contre exemple 62 (FGN p45)**.** *Sur l'espace des fonctions continues de* $[-1, 1]$ *à valeurs réelles muni de la convergence uniforme, la forme linéaire* $f \mapsto \int_0^1 f - \int_{-1}^0 f$ *est continue mais sa norme (qui vaut 2) n'est pas atteinte.*

Définition 63 (Filbet p10)**.** *[Ciarlet p16] Normes matricielles.*

Exemple 64 (Filbet p11,12)**.** *[Ciarlet p16] Normes matricielles.*

Remarque 65. *La norme de Frobenius est une norme matricielle mais pas une norme subordonnée.*

Proposition 66 (Ciarlet p21)**.** $\lim B^k v = 0$ *si et seulement si* $\rho(B) < 1$ *si et seulement si* $||B|| < 1$ *pour au moins une norme matricielle subordonnée.*

Proposition 67 (Ciarlet p22)**.** *[Romb]* $\rho(A) = inf|||A|||$ *l'inf portant sur l'ensemble des normes subordonnées*

Proposition 68 (Romb)**.** $\lim |||A_n|||^{1/n} = \rho(A)$*.*

Application 69 (Ciarlet p96)**.** *Etude de* $X_{n+1} = AX_n$*.*

On cherche une solution de $Ax = b$*. On écrit* $A = M - N$*. On définit la suite* (x_k) *par* $x_{k+1} = M^{-1}Nx_k + M^{-1}b$*. Alors* (x_k) *converge vers la solution* x *ie* $\lim ||x_k - x|| = 0$ *si et seulement si* $\rho(M^{-1}N) < 1$*.*

3 Espaces vectoriels normés et complétude

3.1 Espaces de Banach et de Hilbert

Définition 70 (Gourdon p47)**.** *[Albert p88] Espace de Banach.*

Définition 71. *Espace de Hilbert.*

Proposition 72 (Gourdon p50)**.** *Tout evn de dimension finie est un espace de Banach.*

Exemple 73 (Albert p90)**.** *[St Raym p99] Si* E *est un Banach alors* $B(M, E)$ *muni de la convergence uniforme est un Banach. En particulier, si* K *est un espace métrique compact,* $C(K, E)$ *est un espace de Banach.*

Contre exemple 74. $C([0, 1], \mathbb{R}), ||.||_\infty$ *est un Banach MAIS faux pour* $||.||_1$ *(pas fermé dans* L^1*).*

Contre exemple 75 (Pomm p47)**.** c_c *(suites à support compact) muni de la norme du sup n'est pas complet,* C^0 *muni de la norme* 1 *non plus.(?)*

Contre exemple 76 (Hauch p312)**.** *Pour* $(\mathbb{Q}, |.|)$*,* $\mathbb{Q}$ *est un* $\mathbb{Q}$*-ev de dimension finie, mais il n'est pas complet car* $\sum 1/n!$ *est de Cauchy mais ne converge pas dans* $\mathbb{Q}$*. Il faut que le corps de base soit complet.*

Exemple 77 (St Raym p100)**.** c_0 *et* l^1 *sont des Banach.*

Exemple 78. L^2 *muni de la norme* 2 *est de Hilbert,* l^2 *est un Hilbert.*

Contre exemple 79. $(C([0, 1], K), < ., . >_{L^2})$ *n'est pas un espace de Hilbert car* $x \mapsto x^n$ *est de Cauchy mais ne converge pas dans* $C([0, 1], K)$*.*

Théorème 80. *Théorème de Riesz-Fischer : les espaces* L^p *sont complets.*

Exemple 81. *L'ensemble* $L_c(E, F)$ *muni de la norme subordonnée lorsque* F *est un Banach, est un Banach.*

Proposition 82 (St Raymond p95-96)**.** E *est un Banach si et seulement si la convergence absolue d'une série implique sa convergence. (Ref ?)*

Application 83. $Gl(E)$ *est ouvert et si* $||u|| < 1$*, alors* $Id - u$ *est inversible.*

Application 84. *Soit* $A \in M_n(\mathbb{R})$*. On peut définir son exponentielle comme la somme de la série convergete* $\sum A^n/n!$*.*

3.2 Théorèmes dans les Banach

Théorème 85 (Albert p97)**.** *Théorème du point fixe de Picard.*

Contre exemple 86 (Rouvière p147)**.** $f :]0, 1] \to]0, 1], x \mapsto x/2$ *est contractante mais n'admet pas de point fixe dans* $]0, 1]$ *puisque non complet.*

Application 87 (Albert p100)**.** *Théorème de Cauchy-Lipschitz.*

Application 88 (Rouvière)**.** *Théorème d'inversion locale.*

Théorème 89 (Albert p95)**.** *Théorème de prolongement des applications linéaires continues.*

Application 90 (Albert p95)**.** *[Pommellet ?] Fonctions en escalier.*

Application 91. *Théorème de Plancherel.*

Corollaire 92. *La TF se prolonge en une application de L^2 dans L^2 qui est une isométrie.*

Théorème 93 (Gourdon)**.** *Lemme de Baire.*

Application 94. *Densité des fonctions continues nulle part dérivables.*

Application 95 (Gourdon p399)**.** *Un evn admettant une base dénombrable n'est pas complet.*

Exemple 96. $\mathbb{R}[X]$ *n'est pas complet.*

Théorème 97 (Gourdon p404)**.** *Théorème de Banach Steinhaus.*

Application 98. *La limite simple d'applications linéaires continues est linéaire continue.*

Application 99. *Toute suite qui converge faiblement est bornée.*

Application 100. *L'existence de fonctions continues différentes de leur série de Fourier.*

Contre exemple 101. *Soit $E = c_c(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace des suites à support compact qui n'est pas complet. Soit (T_n) telle que $T_n(x) = nx^n$ pour tout $x \in E$. Alors $\forall x \in E$, $(T_n(x))$ est bornée mais la suite (T_n) n'est pas bornée.*

Théorème 102 (Gourdon p403)**.** *Théorème de l'application ouverte. Théorème de Banach.*

Proposition 103. *Théorème du graphe fermé.*

Application 104. *La transformée de Fourier $TF : L^1 \to c_0$ est continue, injective mais n'est pas surjective de L^1 dans L^1.*

Application 105. *Théorème de Grothendieck.*

3.3 Théorèmes hilbertiens

Théorème 106 (Hirsch p91)**.** *Théorème de projection sur un convexe fermé non vide. (4 résultats cf Karine).*

Remarque 107. *Si C est un sev fermé, alors p est linéaire, donc linéaire continue.*

Exemple 108 (Hirsch p94)**.** *Dans $L^2[0,1]$, $F = \{f \in E, \int_0^1 f(x)dx = 0\}$. Si $f = \exp$ alors $d(f, H) = e - 1$.*

Contre exemple 109. *$H = \mathbb{R}$, $C = \{0, 1\}$ et $x = 1/2$; $H = \mathbb{R}$, $C =]0, 1[$, et $x = 2$; $H = C([0, 1])$ muni de la norme 2, $C = \{f \in H, f = 0 sur [0, 1/2]\}$.*

Application 110 (Rouvière p384)**.** *Moindres carrés (régression linéaire).*

Application 111 (OA p98)**.** *Polynômes de meilleure approximation.*
Soit $E = L^2(\mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}_n[X]$, on a $\forall f \in L^2$ il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $||f - P||_2 = min||f - Q||$ où $Q \in R_n[X]$.
Projection sur $\mathbb{R}_n[X]$ dans le préhilbertien $(C([0, 1]), ||\Delta||_2)$.

Remarque 112. *Regarder OA p98.*

Exemple 113 (FGN An 3)**.** *[Nourdin p51] Calcul du minimum d'une intégrale.*

Corollaire 114 (Hirsch p93)**.** *Théorème du supplémentaire orthogonal.*

Corollaire 115 (Hirsch p93)**.** *Critère de densité.*

Corollaire 116 (Hirsch p94)**.** $\overline{F} = F^{\perp\perp}$.

Contre exemple 117 (OA p98)**.** *Absence de complétude.*

Proposition 118 (OA p99)**.** *[Hirsch ?] Expression du projeté orthogonal sur un sev de dimension finie dont on a une base orthonormée.*

Théorème 119 (Hirsch p96)**.** *Théorème de représentation de Riesz.*

Application 120. *Définition du gradient, du produit vectoriel, de l'adjoint.*

Application 121. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$. Alors l'unique famille de polynômes orthogonaux unitaires (P_n) tel que $\forall n$, $deg(P_n) = n$ forme une base hilbertienne de L^2.*